

VODIČ „B“  
za škole za srednje stručno obrazovanje  
i obuku  
školska 2015./2016. godina

MATEMATIKA

---

**Predmetna komisija:**

**Dina Kamber**

**Maja Hrbat**

**Vernesa Mujačić**

**Mirsad Dumanjić**

## Sadržaj

<b>Uvod.....</b>	<b>1</b>
<b>Obrazovni ishodi po oblastima i temama za nivo B .....</b>	<b>2</b>
I. Skup. Skupovi brojeva i operacije.....	2
II. Stepeni i korijeni .....	2
III. Algebarski izrazi .....	3
IV. Geometrija u ravni .....	3
V. Pravougli koordinatni sistem u ravni .....	4
VI. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina .....	4
VII. Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda .....	5
VIII. Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine .....	5
IX. Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine .....	6
X. Osnovi trigonometrije .....	6
<b>Primjeri zadataka po oblastima (sa rješenjima) za nivo B.....</b>	<b>7</b>
I. Skup. Skupovi brojeva i operacije.....	7
II. Stepeni i korijeni .....	7
III. Algebarski izrazi .....	8
IV. Geometrija u ravni .....	9
V. Pravougli koordinatni sistem u ravni .....	10
VI. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina .....	10
VII. Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda .....	12
VIII. Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine .....	13
IX. Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine .....	14
X. Osnovi trigonometrije .....	15
<b>Primjer ispita za eksternu maturu na nivou B .....</b>	<b>16</b>
<b>Struktura ispita.....</b>	<b>18</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>19</b>

## Uvod

MATEMATIKA je na eksternoj maturi obavezni predmet za sve učenike koji su završili srednju školu sa četverogodišnjim obrazovanjem.

Svi ispitni ciljevi koji se žele postići eksternom maturom iz predmeta Matematika, kao i očekivani rezultati, temelje se na elementima definisanim Nastavnim planom i programom za gimnazije i tehničke škole u Kantonu Sarajevo. Osnovni zadatak eksterne mature iz predmeta Matematika je da izvrši generalnu provjeru temeljnih znanja, sposobnosti i vještina učenika u skladu sa matematičkim kompetencijama neophodnim kako za nastavak školovanja, tako i za rješavanje problema iz svakodnevnog života.

U skladu s tim, opći ciljevi eksterne mature iz predmeta Matematika su:

1. Provjera matematičkih znanja, sposobnosti i vještina stečenih u toku četverogodišnjeg školovanja u gimnazijama i srednjim tehničkim školama koji su definisani kroz Nastavni plan i program predmeta i ovim Vodičem
2. Provjera usvojenosti matematičke pismenosti i pravilnog korištenja matematičkog vokabulara, matematičke sintakse i uopće razumijevanje matematičkog jezika pri čitanju, interpretiranju i rješavanju matematičkih zadataka
3. Provjera usvojenosti matematičkih koncepata, kao i njihovo povezivanje sa ostalim predmetima
4. Provjera usvojenosti znanja i vještina potrebnih za dalji nastavak školovanja
5. Provjera ovladanosti proceduralnim tehnikama koje se primjenjuju u odnosu na odgovarajuće matematičke koncepte
6. Podsticanje unapređivanja nastave – učenja i unapređivanje predmetnog programa Matematike

Ovaj vodič je osnovni dokument ispita koji sadrži informacije o sadržaju ispita i njime je određeno koje znanje se od učenika očekuje na kraju četverogodišnjeg školovanja.

Eksternu maturu na nivou B polažu učenici koji su završili koji su završili četverogodišnje tehničke i srodne škole.

Ovaj vodič sadrži:

- 1) oblasti i teme sa ishodima koje su obuhvaćene eksternom maturom za nivo B
- 2) primjere zadataka za svaku oblast za nivo B
- 3) primjer jednog ispita na osnovu datih tema i ishoda za nivo B

## Obrazovni ishodi po oblastima i temama za nivo B

### I. Skup. Skupovi brojeva i operacije

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Skupovi $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{I}$ , $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ b. Omjeri, proporcije i procenti c. Operacije u skupu kompleksnih brojeva	Učenik treba znati: <ul style="list-style-type: none"><li>- razlikovati skupove <math>\mathbb{N}</math>, <math>\mathbb{Z}</math>, <math>\mathbb{Q}</math>, <math>\mathbb{I}</math>, <math>\mathbb{R}</math>, <math>\mathbb{C}</math> (poznavati termine: prirodan, cijeli, racionalan, iracionalan, realan, kompleksan broj te razlikovati navedene brojeve)</li><li>- prepoznati i upotrebljavati simbole intervala: <math>(a,b)</math>, <math>[a,b)</math>, <math>(a,b]</math>, <math>[a,b]</math></li><li>- zapisivati skupove realnih brojeva intervalima i prikazivati ih na brojnoj osi</li><li>- sabirati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, stepenovati, te određivati apsolutne vrijednosti brojeva u skupovima <math>\mathbb{N}</math>, <math>\mathbb{Z}</math>, <math>\mathbb{Q}</math>, <math>\mathbb{I}</math>, <math>\mathbb{R}</math></li><li>- upotrebljavati omjere i izračunavati procente</li><li>- interpretirati i rješavati probleme sa procentima</li><li>- sabirati, oduzimati, množiti, dijeliti, stepenovati te određivati modul kompleksnih brojeva u algebarskom obliku, kao i stepene imaginarne jedinice</li><li>- određivati realni i imaginarni dio kompleksnog broja u algebarskom obliku</li></ul>

### II. Stepeni i korijeni

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
a. Stepeni sa cjelobrojnim eksponentima. Operacije sa stepenima b. Korijeni. Operacije sa korijenima c. Stepeni sa racionalnim eksponentima d. Racionalizacija nazivnika	Učenik treba znati: <ul style="list-style-type: none"><li>- primjenjivati pravila za računanje sa stepenima s cjelobrojnim eksponentom za generisanje ekvivalentnih numeričkih izraza</li><li>- razumjeti i primjenjivati oblast definisanosti korjenske funkcije i njene osobine</li><li>- primjenjivati pravila za računanje sa korijenima za generisanje ekvivalentnih numeričkih izraza,</li><li>- prepoznati stepen čiji je eksponent racionalan broj i primjenjivati vezu</li><li>- primjenjivati pravila za računanje sa stepenima sa racionalnim eksponentom za generisanje ekvivalentnih numeričkih izraza</li><li>- racionalisati nazivnik</li></ul>

### III. Algebarski izrazi

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p>a. Cijeli algebarski izrazi. Transformacija cijelih algebarskih izraza. Rastavljanje cijelih algebarskih izraza na faktore</p> <p>b. Polinomi. Sabiranje, oduzimanje i množenje polinoma. Dijeljenje polinoma. Hornerova shema</p> <p>c. Razlomljeni algebarski izrazi. Transformacija razlomljenih algebarskih izraza</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- sabirati, oduzimati i množiti jednostavnije algebarske izraze</li><li>- riješiti problemski zadatak prikazivanjem problemske situacije brojnim izrazom i izračunavanjem njegove vrijednosti</li><li>- primjenjivati formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata</li><li>- sabirati, oduzimati, množiti i stepenovati polinome jedne ili više promjenjivih</li><li>- dijeliti polinome jedne promjenjive primjenom osnovnog postupka kao i primjenom Hornerove sheme</li><li>- razlikovati i imenovati cijele i racionalne algebarske izraze i određivati njihove oblasti definisanosti</li><li>- sabirati, oduzimati, množiti i dijeliti jednostavnije razlomljene algebarske izraze</li></ul>

### IV. Geometrija u ravni

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p>a. Trougao. Podudarnost trouglova</p> <p>b. Krug i kružnica</p> <p>c. Četverougao</p> <p>d. Obimi i površine figura u ravni</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- razlikovati konveksne i nekonveksne figure, vrste uglova, vrste trouglova, vrste četverouglova, kao i kružnicu i krug</li><li>- primjenjivati osnovna svojstva trouglova pri rješavanju jednostavnijih problemskih zadataka</li><li>- razlikovati značajne tačke trougla</li><li>- primjenjivati stavove podudarnosti trouglova pri rješavanju jednostavnijih problemskih zadataka</li><li>- primjenjivati Pitagorin teorem i njegov obrat pri rješavanju jednostavnijih problemskih zadataka</li><li>- primjenjivati osnovna svojstva četverouglova pri rješavanju jednostavnijih problemskih zadataka</li><li>- primjenjivati osnovna svojstva kružnice i kruga pri rješavanju jednostavnijih problemskih zadataka</li><li>- znati vezu između centralnog i perifernog ugla nad istim kružnim lukom</li><li>- primjenjivati formule za izračunavanje obima i površine geometrijskih figura u ravni</li></ul>

## V. Pravougli koordinatni sistem u ravni

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p>a. Udaljenost između dvije tačke. Koordinate središta duži</p> <p>b. Koordinate težišta trougla. Površina trougla</p> <p>c. Funkcija direktne proporcionalnosti <math>y = kx</math>. Funkcija <math>y = kx + n</math>.</p> <p>d. Funkcija obrnute proporcionalnosti <math>y = \frac{k}{x}</math></p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- prikazati i pročitati koordinate tačaka u pravouglom koordinatnom sistemu</li> <li>- izračunati udaljenost između dvije tačke</li> <li>- primjenjivati formulu za izračunavanje koordinata središta duži, koordinata težišta trougla i površine trougla pri rješavanju jednostavnijih zadataka</li> <li>- odrediti domen funkcija <math>y = kx + n</math> i <math>y = \frac{k}{x}</math></li> <li>- izračunati vrijednosti funkcija <math>y = kx + n</math> i <math>y = \frac{k}{x}</math></li> <li>- prikazati funkcije <math>y = kx + n</math> i <math>y = \frac{k}{x}</math> grafički i tabelarno</li> <li>- odrediti nula-tačke funkcije <math>y = kx + n</math></li> <li>- odrediti koordinate presječnih tačaka grafa funkcije <math>y = kx + n</math> s koordinatnim osama</li> <li>- iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju</li> <li>- odrediti tok funkcija <math>y = kx + n</math> i <math>y = \frac{k}{x}</math></li> <li>- odrediti znak funkcija <math>y = kx + n</math> i <math>y = \frac{k}{x}</math></li> </ul>

## VI. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p>a. Rješavanje linearnih jednačina sa jednom nepoznom</p> <p>b. Rješavanje linearnih jednačina sa apsolutnim vrijednostima</p> <p>c. Diskusija rješenja linearne jednačine sa jednom nepoznom i jednim parametrom</p> <p>d. Rješavanje linearnih nejednačina sa jednom nepoznom</p> <p>e. Rješavanje sistema linearnih jednačina sa dvije ili tri nepoznate. Metoda supstitucije. Gausova metoda. Metoda determinanti</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- rješavati linearne jednačine sa jednom nepoznom i diskutovati rješenja ovisno o parametru</li> <li>- rješavati jednostavnije linearne jednačine sa jednom ili dvije apsolutne vrijednosti</li> <li>- rješavati linearne nejednačine sa jednom nepoznom i rješenja grafički prikazati na brojnoj osi</li> <li>- rješavati sisteme linearnih jednačina sa dvije ili tri nepoznate primjenom jedne od navedenih metoda</li> </ul>

## VII. Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda.

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p><b>Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine</b></p> <p>a. Grafik kvadratne funkcije  <math>y = ax^2 + bx + c</math> (nule, ekstrem, tok, znak)</p> <p>b. Rješavanje kvadratne jednačine.            Vietove formule</p> <p>c. Rješavanje kvadratne nejednačine</p> <p>d. Diskriminanta kvadratne jednačine.</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- odrediti domenu kvadratne funkcije</li> <li>- nacrtati grafik kvadratne funkcije, kao i znati s grafika interpretirati njene osobine</li> <li>- izračunati vrijednosti kvadratne funkcije</li> <li>- odrediti nula-tačke kvadratne funkcije</li> <li>- odrediti koordinate presječnih tačaka grafa kvadratne funkcije s koordinatnim osama</li> <li>- odrediti i primijeniti ekstreme kvadratne funkcije</li> <li>- odrediti tok i znak kvadratne funkcije</li> <li>- riješiti kvadratnu jednačinu primjenom formule za rješenja kvadratne jednačine i znati zavisnost prirode rješenja od diskriminante</li> <li>- primjenjivati Vietove formule u jednostavnijim slučajevima</li> <li>- primjenjivati rastav kvadratnog trinoma na proste faktore</li> <li>- na osnovu datih rješenja formirati kvadratnu jednačinu</li> <li>- rješavati kvadratne nejednačine analitički i grafički</li> </ul>
<p><b>Jednačine višeg reda</b></p> <p>e. Jednačine višeg reda (bikvadratna, kubna, simetrična trećeg i četvrtog reda)</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- rješavati bikvadratne jednačine, kao i ostale jednačine višeg reda koje se svode na kvadratnu jednačinu</li> </ul>

## VIII. Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p>a. Eksponencijalna funkcija <math>y = a^x</math>  <math>(a &gt; 0, a \neq 1)</math>. Svojstva i grafik</p> <p>b. Eksponencijalne jednačine</p> <p>c. Eksponencijalne nejednačine</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- odrediti domenu eksponencijalne funkcije</li> <li>- nacrtati grafik eksponencijalne funkcije, kao i znati s grafika interpretirati njene osobine</li> <li>- izračunati vrijednosti eksponencijalne funkcije</li> <li>- odrediti tok i znak eksponencijalne funkcije</li> <li>- prepoznati i riješiti jednostavnije eksponencijalne jednačine</li> <li>- prepoznati i riješiti jednostavnije eksponencijalne nejednačine</li> <li>- koristiti svojstva eksponencijalnih funkcija pri rješavanju eksponencijalnih jednačina i nejednačina</li> </ul>

## IX. Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p>a. Logaritamska funkcija <math>y = \log_a x</math>. Svojstva i grafik</p> <p>b. Logaritamske jednačine</p> <p>c. Logaritamske nejednačine</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- odrediti domenu logaritamske funkcije</li><li>- nacrtati grafik logaritamske funkcije, kao i znati s grafika interpretirati njene osobine</li><li>- izračunati vrijednosti logaritamske funkcije</li><li>- odrediti tok i znak logaritamske funkcije</li><li>- primjenjivati pravila logaritmiranja</li><li>- prepoznati i riješiti jednostavnije logaritamske jednačine</li><li>- prepoznati i riješiti jednostavnije logaritamske nejednačine</li><li>- koristiti svojstva logaritamskih funkcija pri rješavanju logaritamskih jednačina i nejednačina</li></ul>

## X. Osnovi trigonometrije

Pojmovi/sadržaj	Ishodi učenja:
<p>a. Primjena trigonometrijskih funkcija na rješavanje zadataka iz pravouglog trougla</p> <p>b. Dokazivanje jednostavnijih trigonometrijskih identiteta</p>	<p>Učenik treba znati:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- primjenjivati trigonometrijske funkcije oštih uglova na rješavanje zadataka</li><li>- primjenjivati osnovni trigonometrijski identitet pri rješavanju jednostavnijih zadataka i pri dokazivanju jednostavnijih trigonometrijskih identiteta</li></ul>



## Primjeri zadataka po oblastima (sa rješenjima) za nivo B

### I. Skup. Skupovi brojeva i operacije

**Primjer 1:** Uglovi petougla se odnose kao  $2 : 3 : 4 : 5 : 6$ . Odrediti te uglove.

**Rješenje:** Zbir uglova u petouglu je  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$ . Pošto je  $\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = 2 : 3 : 4 : 5 : 6$ , imamo:

**I način**

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon}{2 + 3 + 4 + 5 + 6} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{\delta}{5} = \frac{\varepsilon}{6} = k$$

$$\frac{540}{20} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{\delta}{5} = \frac{\varepsilon}{6} = k \Rightarrow k = 27$$

$$\alpha = 2k \Rightarrow \alpha = 54^\circ, \quad \beta = 3k \Rightarrow \beta = 81^\circ, \quad \gamma = 4k \Rightarrow \gamma = 108^\circ, \\ \delta = 5k \Rightarrow \delta = 135^\circ, \quad \varepsilon = 6k \Rightarrow \varepsilon = 162^\circ$$

**II način**

$$\alpha = 2k, \beta = 3k, \gamma = 4k, \delta = 5k, \varepsilon = 6k$$

$$2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 540 \Rightarrow 20k = 540 \Rightarrow k = 27$$

$$\alpha = 54^\circ, \beta = 81^\circ, \gamma = 108^\circ, \delta = 135^\circ, \varepsilon = 162^\circ$$

---

**Primjer 2:** Odrediti  $Re(z)$  i  $Im(z)$  kompleksnog broja  $z = \frac{2-i}{2+i}$ .

**Rješenje:**

$$z = \frac{2-i}{2+i} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(2-i)^2}{4-i^2} = \frac{4-4i+i^2}{4+1} = \frac{4-4i-1}{5} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$Re(z) = \frac{3}{5}, \quad Im(z) = -\frac{4}{5}$$

### II. Stepeni i korijeni

**Primjer 1:** Pojednostaviti:  $\left(\frac{3a^2}{4b^{-3}}\right)^{-3} : \left(\frac{9a^{-2}b}{4c}\right)^{-2}$

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} \left(\frac{3a^2}{4b^{-3}}\right)^{-3} : \left(\frac{9a^{-2}b}{4c}\right)^{-2} &= \frac{3^{-3}a^{-6}}{4^{-3}b^9} : \frac{9^{-2}a^4b^{-2}}{4^{-2}c^{-2}} = \\ &= \frac{4^3}{3^3a^6b^9} : \frac{4^2a^4c^2}{9^2b^2} = \frac{64}{27a^6b^9} \cdot \frac{81b^2}{16a^4c^2} = \frac{4}{a^6b^7} \cdot \frac{3}{a^4c^2} = \\ &= \frac{12}{a^{10}b^7c^2} \end{aligned}$$

---

**Primjer 2:** Dovedi izraz  $\sqrt[4]{a^3\sqrt{a^2}} \cdot \sqrt[3]{a^3\sqrt{a}} : \sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^{13}}}$ ,  $a > 0$ , na što jednostavniji oblik.

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{a^3\sqrt{a^2}} \cdot \sqrt[3]{a^3\sqrt{a}} : \sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^{13}}} = \sqrt[4]{a^3\sqrt{a^2} \cdot a^2\sqrt[3]{a^{13}}} = \sqrt[4]{a^3\sqrt{a^2} \cdot a^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^6} \cdot a} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^6 \cdot a^{13}}} = \\ & = \sqrt[12]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^7} : \sqrt[12]{a^{19}} = \sqrt[12]{a^5} \cdot \sqrt[12]{a^{14}} : \sqrt[12]{a^{19}} = \sqrt[12]{a^5 \cdot a^{14}} : \sqrt[12]{a^{19}} = \\ & = \sqrt[12]{a^{19}} : \sqrt[12]{a^{19}} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

### III. Algebarski izrazi

**Primjer 1:** Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma  $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$  sa polinomom  $Q(x) = x - 1$ .

**Rješenje:**

Podijelimo polinom  $P(x)$  polinomom  $Q(x)$  koristeći npr. Hornerovu shemu:

1	2	-1	3	-4	1
	2	1	4	0	1

Količnik pri dijeljenju polinoma  $P(x)$  polinomom  $Q(x)$  je  $S(x) = 2x^3 + x^2 + 4x$ , a ostatak je  $R = 1$ .

---

**Primjer 2:** Pojednostaviti izraz  $\left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}\right) : \frac{4x}{4x^2-1}$  za  $x \neq \pm \frac{1}{2}$

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}\right) : \frac{4x}{4x^2-1} = \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} : \frac{4x}{(2x-1)(2x+1)} = \\ & = \frac{4x^2 + 4x + 1 - (4x^2 - 4x + 1)}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{(2x-1)(2x+1)}{4x} = \\ & = \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 1}{1} \cdot \frac{1}{4x} = \frac{8x}{4x} = \mathbf{2} \end{aligned}$$

---

**Primjer 3:** Izračunati  $(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}})^2$

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 = \\ & = 6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} + 6 + 2\sqrt{5} = 12 - 2\sqrt{36-20} = \\ & = 12 - 8 = \mathbf{4} \end{aligned}$$

## IV. Geometrija u ravni

**Primjer 1:** Dužine stranica trougla iznose  $a = 37$  cm,  $b = 20$  cm,  $c = 51$  cm. Izračunati površinu i visinu  $h_a$ .

**Rješenje:** Koristit ćemo Heronov obrazac za računanje površine trougla:

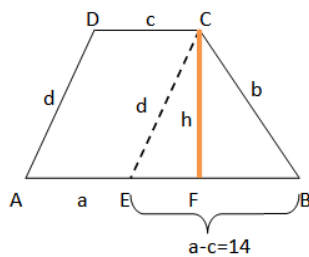
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{37+20+51}{2} = 54$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{54(54-37)(54-20)(54-51)} = \sqrt{54 \cdot 17 \cdot 34 \cdot 3} =$$
$$= \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{(9 \cdot 2 \cdot 17)^2} = \mathbf{306 \text{ cm}^2}$$

Da bismo odredili visinu  $h_a$ , koristit ćemo drugačiju formulu za površinu trougla:

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2P}{a} = \frac{2 \cdot 306}{20} = \mathbf{30,6 \text{ cm}}$$

**Primjer 2:** Odrediti površinu trapeza čije su osnovice dužine  $a = 20$  cm,  $c = 6$  cm, a kraci su dužine  $b = 15$  cm,  $d = 13$  cm.



**Rješenje:** Odaberemo tačku  $E$  na stranici  $AB$ , tako da je  $CE \parallel AD$ . Tada je  $\overline{CE} = \overline{AD} = 13$  cm.

Izračunajmo površinu trougla  $EBC$  koristeći Heronov obrazac:

$$s = \frac{d+b+(a-c)}{2} = \frac{13+15+14}{2} = 21$$
$$P = \sqrt{s(s-d)(s-b)(s-(a-c))} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} =$$
$$= \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{(7 \cdot 3 \cdot 4)^2} = 84 \text{ cm}^2$$

Površina ovog trougla se može izračunati i po formuli  $P = \frac{(a-c)h}{2}$  pomoću koje nalazimo dužinu visine datog trapeza:

$$h = \frac{2P}{a-c} = \frac{168}{14} = 12 \text{ cm}$$

Površina trapeza je:

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{20+6}{2} \cdot 12 = 13 \cdot 12$$

$$\mathbf{P = 156 \text{ cm}^2}$$

## V. Pravougli koordinatni sistem u ravni

**Primjer 1:** Tačke A(-3, -2), B(6, 1) i C(-2, y) su tjemena trougla. Kolika je ordinata y tačke C, ako je površina trougla 21 i trougao obilazimo u pozitivnom smjeru?

**Rješenje:** Neka su A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>) i C(x<sub>3</sub>, y<sub>3</sub>) vrhovi trougla, tada je površina trougla data sa  $P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_2) + x_3(y_1 - y_2)|$ .

Ako trougao obilazimo u pozitivnom smjeru, tada u formuli za površinu možemo izostaviti apsolutnu vrijednost.

$$\text{Dakle: } 21 = \frac{1}{2} [-3(1 - y) + 6(y + 2) - 2(-2 - 1)] / \cdot 2$$

$$42 = -3 + 3y + 6y + 12 + 4 + 2$$

$$42 = 9y + 15$$

$$9y = 27$$

$$y = 3$$

---

**Primjer 2:** Odrediti parametar m tako da funkcija  $y = (4m - 6)x - (3m - 2)$  ima nulu  $x = 2$ .

**Rješenje:** Pošto je nula funkcije  $x = 2$ , to znači da za  $x = 2$  funkcija ima vrijednost  $y = 0$ . Pa uvrštavajući  $x = 2$  i  $y = 0$  u datu funkciju, dobijamo:

$$0 = (4m - 6) \cdot 2 - (3m - 2)$$

$$0 = 8m - 12 - 3m + 2$$

$$0 = 5m - 10$$

$$m = 2 \text{ (funkcija } y = 2x - 4)$$

## VI. Linearne jednačine i nejednačine. Sistemi linearnih jednačina

**Primjer 1:** Riješiti jednačinu  $|2x - 3| = \frac{(2x+3)^2}{6} - \frac{4x^2+2x+3}{6}$

**Rješenje:** Pojednostavimo prvo desnu stranu date jednačine.

$$\begin{aligned} |2x - 3| &= \frac{(2x + 3)^2}{6} - \frac{4x^2 + 2x + 3}{6} \\ |2x - 3| &= \frac{4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 + 2x + 3)}{6} \\ |2x - 3| &= \frac{10x + 6}{6} \quad (1) \end{aligned}$$

Imamo dva slučaja:

- i.  $2x - 3 \geq 0$
- ii.  $2x - 3 < 0$

**Prvi slučaj**

$$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

Jednačina (1) postaje:

$$2x - 3 = \frac{10x + 6}{6} / \cdot 6$$

$$12x - 18 = 10x + 6$$

$$2x = 24$$

$$x = 12 \text{ i } 12 \geq \frac{3}{2}$$

pa je jedno rješenje jednačine  $x = 12$ .

**Drugi slučaj**

$$2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

Jednačina (1) postaje:

$$-2x + 3 = \frac{10x + 6}{6} / \cdot 6$$

$$-12x + 18 = 10x + 6$$

$$-22x = -12$$

$$x = \frac{6}{11} \text{ i } \frac{6}{11} < \frac{3}{2}$$

pa je drugo rješenje jednačine  $x = \frac{6}{11}$ .

**Primjer 2:** Riješiti nejednačinu  $\frac{2x-3}{4-x} < 3$

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{4-x} - 3 &< 0 \\ \frac{2x-3-3(4-x)}{4-x} &< 0 \\ \frac{2x-3-12+3x}{4-x} &< 0 \\ \frac{5x-15}{4-x} &< 0 \quad /:5 \\ \frac{x-3}{4-x} &< 0 \end{aligned}$$

Rješenje ove nejednačine naći ćemo pomoću sljedeće tabele:

	$-\infty$	3	4	$\infty$
$x - 3$	-	+	+	
$4 - x$	+	+	-	
$\frac{x-3}{4-x}$	-	+	-	

Pa je rješenje naše nejednačine  $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ .

## VII. Kvadratne funkcije, jednačine i nejednačine. Jednačine višeg reda

**Primjer 1:** Za koje vrijednosti realnog parametra  $m$  jednačina  $x^2 - (m - 1)x + 1 = 0$  ima konjugovano-kompleksna rješenja?

**Rješenje:** Da bi kvadratna jednačina imala konjugovano-kompleksna rješenja njena diskriminanta mora biti negativna.

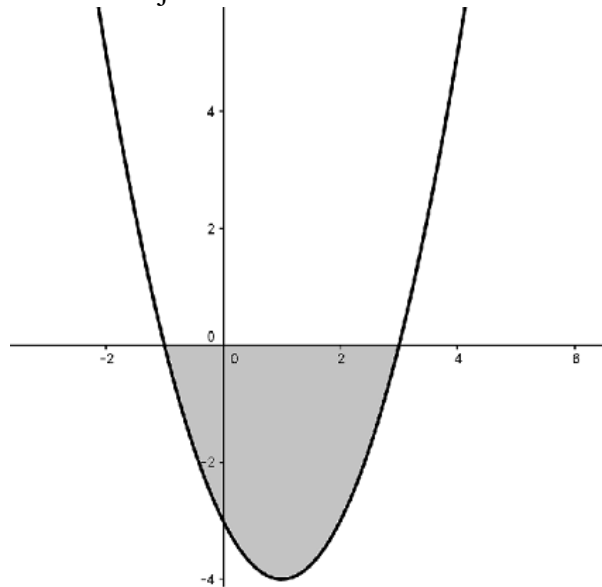
$$D < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$$

$$(m - 1)^2 - 4 < 0$$

$$m^2 - 2m + 1 - 4 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 < 0$$

Rješenja jednačine  $m^2 - 2m - 3 = 0$  su  $m_1 = -1$  i  $m_2 = 3$ .

Grafik funkcije  $y = m^2 - 2m - 3$  je



Pa vidimo da je rješenje  $m \in (-1, 3)$ .

**Primjer 2:** Riješiti jednačinu  $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ .

**Rješenje:** Ovo je simetrična jednačina trećeg reda. Rješavamo je grupiranjem članova jednačine koji imaju koeficijente jednake po apsolutnoj vrijednosti:

$$\begin{aligned}(2x^3 - 2) + (3x^2 - 3x) &= 0 \\ 2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) &= 0 \\ (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) &= 0\end{aligned}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -2$$


---

**Primjer 3:** Odredi vrijednost parametra  $m$  tako da rješenja jednačine  $2x^2 - mx - 1 = 0$  zadovoljavaju uslov  $x_1^2 + x_2^2 < 2$ .

**Rješenje:** Uslov  $x_1^2 + x_2^2 < 2$  napisat ćemo kao  $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 2$  te iskoristiti Vietova pravila:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m}{2}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Uvrštavajući (1) u izmijenjenu formu datog uslova, dobijamo:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1 < 2 \Rightarrow m^2 - 4 < 0$$

Rješenje dobijene nejednačine (tj. vrijednosti parametra  $m$  za koje rješenja date jednačine zadovoljavaju uslov  $x_1^2 + x_2^2 < 2$ ) je  $m \in (-2, 2)$ .

## VIII. Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine

**Primjer 1:** Riješiti jednačinu  $7^x - 7^{x-1} = 6$

**Rješenje:**

$$7^x - 7^x \cdot 7^{-1} = 6$$

$$7^x \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6$$

$$7^x \cdot \frac{6}{7} = 6$$

$$7^x = 7 \Rightarrow x = 1$$

**Primjer 2:** Riješiti nejednačinu  $\left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} > \frac{25}{16}$

**Rješenje:**

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} > \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} > \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$$

Baza stepena je  $\frac{4}{5} \in (0,1) \Rightarrow 1 - 2x < -2$

$$-2x < -3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

## IX. Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine

**Primjer 1:** Riješiti jednačinu  $\log\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 2$

**Rješenje:**

Definiciono područje jednačine  $\log\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 2$  je  $x \neq -1$  (jer je  $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 > 0$  za svako realno  $x \neq -1$ ).

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 &= \log 10^2 \\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 &= 10^2 \\ \frac{x+1}{2} &= \pm 10 / \cdot 2 \Rightarrow x+1 = \pm 20 \\ x_1 &= 19, x_2 = -21\end{aligned}$$

Obje dobijene vrijednosti pripadaju definicionom području jednačine, tako da imamo dva rješenja,  $x_1 = 19$  i  $x_2 = -21$ .

---

**Primjer 2:** Riješiti nejednačinu  $\log_2(x^2 - 3x + 4) < 1$

**Rješenje:** Definiciono područje određujemo iz uslova  $x^2 - 3x + 4 > 0$ .

Diskriminanta ove nejednačine je  $D = 9 - 16 = -7 < 0$ , a koeficijent ispred kvadratnog člana je pozitivan. Dakle  $x^2 - 3x + 4 > 0$  za svako realno  $x$ , tj. definiciono područje nejednačine je  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Data nejednačina je ekvivalentna nejednačini:

$$\log_2(x^2 - 3x + 4) < \log_2 2$$

Pošto je baza logaritma  $a = 2 > 1$ , nejednačina postaje:

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 4 &< 2 \\ x^2 - 3x + 2 &< 0 \\ (x-1)(x-2) &< 0\end{aligned}$$

Rješenje ove nejednačine je  $x \in (1, 2)$ .



## X. Osnovi trigonometrije

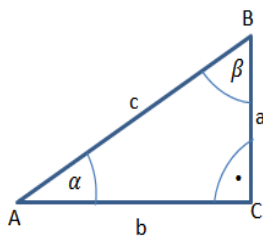
**Primjer 1:** Dokazati identitet:  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha}$ ,  $\sin\alpha \neq 0$ ,  $\cos\alpha \neq 0$

**Rješenje:**  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha}$

---

**Primjer 2:** Izračunati obim pravouglog trougla  $ABC$  ako dužina katete uz ugao  $\alpha$  iznosi 8 cm i ako je  $\operatorname{tg}\alpha = 0,75$ .

**Rješenje:** Dato je  $b = 8$  cm i  $\operatorname{tg}\alpha = 0,75$ .



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow 0,75 = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \cdot 0,75$$

$$a = 6 \text{ cm}$$

Pomoću Pitagorinog teorema lako nađemo dužinu hipotenuze  $c$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10 \text{ cm}$$

Sad možemo izračunati obim trougla:

$$O = a + b + c = 6 + 8 + 10 = \mathbf{24 \text{ cm}}$$

## Primjer ispita za eksternu maturu na nivou B

**Napomena:** Rješenja zadataka su uokvirena.

---

1. Dati su kompleksni brojevi  $z_1 = 2 + 3i$  i  $z_2 = -2 + i$ . Koliko iznosi  $|z_1 + z_2|$ :

- a)  $-4$
- b)  $416$
- c)  $4$
- d)  $-23 - 38i$

2. Pojednostaviti izraz  $\left(-\frac{a^3b}{b^{-1}a^{-1}}\right)^{-2} : (ab)$

Rješenje je:

- a)  $-\frac{1}{a^4b^3}$
- b)  $\frac{1}{a^4b^3}$
- c)  $-\frac{1}{a^9b^5}$
- d)  $\frac{1}{a^9b^5}$

3. Rastaviti na faktore  $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ .

Rješenje je:

- a)  $(a - b + c)(a + b - c)$
- b)  $(a - b - c)(a + b - c)$
- c)  $(a - b - c)(a + b + c)$
- d)  $(a - b + c)(a + b + c)$

4. Izračunati površinu pravougaonika čiji je obim 14 m, a njegova dijagonala ima dužinu 5 m.

**Rješenje:**  $P = 12 \text{ m}^2$

5. Odrediti parametar  $m$  tako da grafik funkcije  $y = (m - 2)x - 3(m - 3)$  prolazi tačkom  $A(5,7)$ .

**Rješenje:**  $m = 4$

6. Riješiti jednačinu  $|3x - 2| + x = 2$

**Rješenje:**  $x_1 = 0, x_2 = 1$

7. Odrediti vrijednosti parametra  $m$  tako da rješenja jednačine  $x^2 - mx + 2 = 0$  budu konjugovano-kompleksni brojevi.

**Rješenje:**  $m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

8. Riješiti jednačinu:  $0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$

**Rješenje:**  $x_1 = -2, x_2 = 4$

9. Riješiti nejednačinu:  $\log_{0,5}(x - 1) > 1$

**Rješenje:**  $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$

10. Odrediti vrijednost  $\operatorname{ctg} \alpha$ , ako je  $\sin \alpha = \frac{20}{29}$  i  $\alpha$  oštri ugao ( $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ ).

**Rješenje:**  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{21}{20}$

## Struktura ispita

Svi zadaci u Vodiču su koncipirani na osnovu nastavnih jedinica iz važećeg Nastavnog plana i programa srednjih tehničkih škola. Selekcija zadataka je izvršena na osnovu odobrenih udžbenika Matematike za srednje tehničke škole.

Ispit će se sastojati od 10 zadataka ujednačene težine i slične strukture kao u Vodiču. Maksimalan broj bodova koje učenik može osvojiti na ispitu iznosi 10 bodova.

Jedan zadatak se boduje sa 1 bod ili 2 x 0,50 bodova. Ako zadatak sadrži jedan dio, onda se tačan odgovor boduje 1 bodom, a ako je zadatak sastavljen iz dva dijela onda se svaki tačno urađen dio boduje sa 0,50 bodova.

## Literatura

1. *Nastavni planovi i programi iz matematike četverogodišnjih srednjih škola Kantona Sarajevo*
2. Hodžić, A. *Matematika za učiteljsku školu*. „OKO“ Sarajevo
3. Huskić, A. *Matematika za tehničke škole I*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
4. Huskić, A. *Matematika sa zbirkom zadataka II*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
5. Huskić, A. *Matematika – zbirka riješenih zadataka III*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
6. Prgo, Š. *Matematika za drugi razred srednjih škola*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo
7. Softić, S. *Matematika za treći razred srednjih škola*. IP „Svjetlost“ d.d. Sarajevo